ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

3ο φυλλάδιο ασκήσεων

1) Δείξτε ότι για αποιαδήποτε σύνολα A, B, Γ, Δ ισχύουν τα εξής:
α) $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$.
β) $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
γ) $(A \cap B) \setminus (A \cap \Gamma) = A \cap (B \setminus \Gamma)$.
δ) $(A \setminus B) \cap (\Gamma \setminus \Delta) = (A \cap \Gamma) \setminus (B \cup \Delta)$.

2) Αν K, Λ είναι δύο σύνολα, να δείξετε την ισοδυναμία

$$K \subseteq \Lambda \Leftrightarrow K \setminus \Lambda \subseteq \Lambda \setminus K.$$

3) Για οποιαδήποτε σύνολα A, B να δείξετε τα εξής:
α) $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.
β) $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \{\emptyset\}$.

4) Δίνεται η ακολουθία συνόλων $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με $A_1 = \emptyset$ και $A_{n+1} = A_n \cup \{A_n\}$. Να βρεθούν τα σύνολα A_2, A_3, A_4 και το $\mathcal{P}(A_3)$.

5) Δίνεται η ακολουθία συνόλων $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με $A_1 = \emptyset$ και $A_{n+1} = \mathcal{P}(A_n) \setminus A_n$. Να βρεθούν τα σύνολα A_2, A_2, A_4, A_5.

6) Αν X, Y, Z, W είναι τυχόντα σύνολα, να αποδειχθούν τα εξής:
α) $(x, y) \notin X \times Y \quad \Leftrightarrow \quad x \notin X \vee y \notin Y$.
β) $(X \times Y) \setminus (Z \times W) = [X \times (Y \setminus W)] \cup [(X \setminus Z) \times Y]$.

7) α) Αν A, B είναι δύο μη κενά σύνολα και ισχύει $A \times B \subseteq B \times A$ να δειχθεί ότι $A = B$.
β) Να δείξετε (χρησιμοποιώντας κατάλληλο αντιπαράδειγμα) ότι η υπόθεση ότι τα σύνολα A, B είναι μη κενά δεν μπορεί να παραλειφθεί στο προηγούμενο ερώτημα.

8) α) Αν A, B, Γ είναι τρία σύνολα και ισχύει $B \times \Gamma = A \times A$ να δείξετε ότι $B \cap \Gamma = A$.
β) Αν X, Y είναι μη κενά σύνολα και ισχύει $(X \times Y) \cup (Y \times X) \subseteq A \times A$ να δείξετε ότι $X \cup Y \subseteq A$.
γ) Να δείξετε (χρησιμοποιώντας κατάλληλο αντιπαράδειγμα) ότι η υπόθεση ότι τα σύνολα X, Y είναι μη κενά δεν μπορεί να παραλειφθεί στο προηγούμενο ερώτημα.
δ) Αν $A \times A \subseteq (X \times Y) \cup (Y \times X)$, να δείξετε ότι $A \subseteq X \cap Y$.